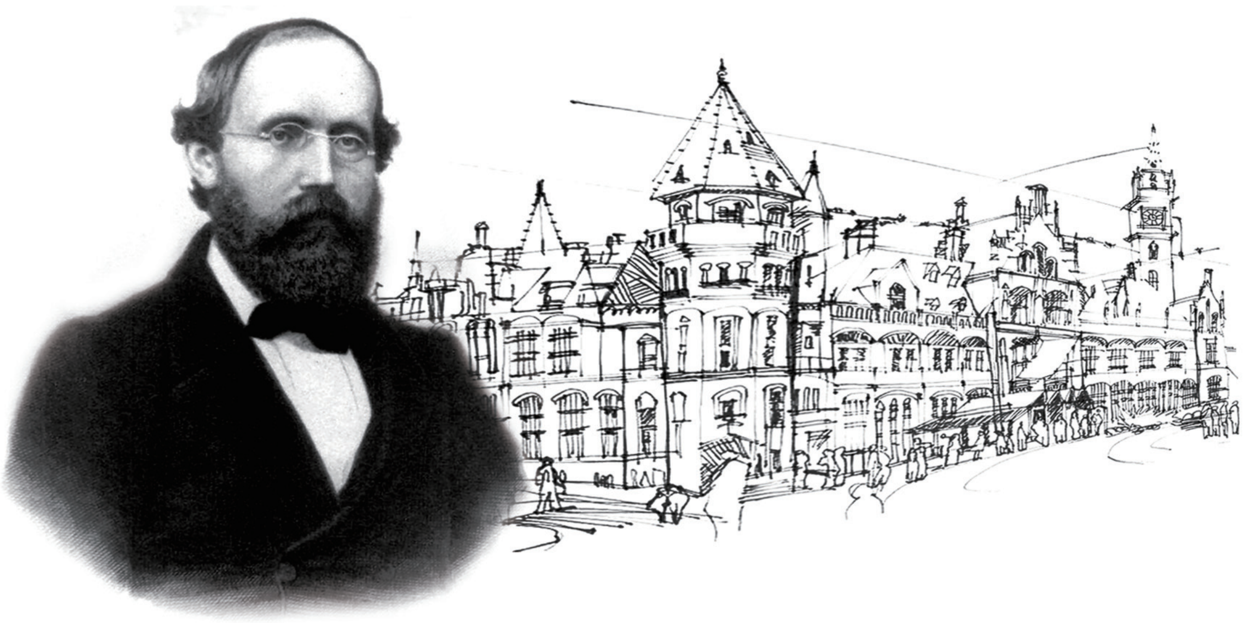
Riemann



黎曼猜想漫谈(一)

卢昌海

1 引言

让我们从一则小故事开始我们的黎曼(Riemann)猜想之旅吧。故事大约发生在八十年前，当时英国有一位很著名的数学家叫做哈代(Godfrey Hardy，1877-1947)，在我看来他是两百年来英国数学界的一位勇者。为什么说他是勇者呢？因为在十七世纪的时候，英国数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战。论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是英国的科学泰斗牛顿(Isaac Newton，1642-1727)，另一边是欧洲大陆德国的哲学家及数学家莱布尼兹(Gottfried Leibniz，1646-1716)。这一场论战打下来，两边筋疲力尽自不待言，还大伤了和气，留下了旷日持久的后遗症。自那以后，英国的许多数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展。一场争论演变到这样的一个地步，英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产，英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路。

这下坡路一走便是两百年。

在这样的一个背景下，在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆的危险概念的时候，土生土长的英国数学家哈代却对来自欧洲大陆(而且偏偏还是德国)、有着复变函数色彩的数学猜想——黎曼猜想——产生了浓厚的兴趣，积极地研究它，并且——如我们将在后文中介绍的——取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就，算得上是勇者所为。

当时哈代在丹麦有一位很要好的数学家朋友

叫做哈拉尔德•玻尔（Harald August Bohr，1887-1951），他是著名量子物理学家尼尔斯•玻尔（Niels Bohr，1885-1962）的弟弟。小玻尔对黎曼猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家艾德蒙•朗道（Edmund Landau，1877-1938）一起研究黎曼猜想（他们的研究成果也将在后文中加以介绍）。哈代很喜欢与玻尔共度暑假，一起讨论黎曼猜想。他常常要待到假期将尽才匆匆赶回英国。结果有一次当他赶到码头时，发现只剩下一条小船可以乘坐了。没办法，他只得硬着头皮登上。在汪洋大海中乘坐小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹。信奉上帝的乘客们此时都忙着祈求上帝的保佑。哈代却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信，有一年他还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三（排名第一的是证明黎曼猜想）。不过在这生死攸关的时候哈代也没闲着，他给玻尔发去了一封简短的明信片，上面只有一句话：

“我已经证明了黎曼猜想！”

哈代果真已经证明了黎曼猜想吗？当然不是。那他为什么要发这么一个明信片呢？回到英国后他向波尔解释了原因，他说如果那次他乘坐的小船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了黎曼猜想。但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人的，因此上帝一定不会让他的小船沉没的。哈代的这个解释让我想起了一句有趣的无神论者的祈祷语：God, if there is one, save my soul if I have one（上帝啊，如果你存在的话，拯救我的灵魂吧，如果我有灵魂的话）。

上帝果然没舍得让哈代的小船沉没。自那以后又过了八十来个年头，吝啬的上帝依然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人。

2 黎曼 ζ 函数与黎曼猜想

那么这个让上帝如此吝啬的黎曼猜想究竟是一个什么样的猜想呢？在回答这个问题之前我们先得介绍一个函数：黎曼 ζ 函数。这个函数虽然挂着黎曼的大名，其实并不是黎曼首先提出的。但黎曼虽然不是这一函数的提出者，他的工作却大大加深了人们对这一函数的理解，为其在数学与物理上的广泛应用奠定了基础。后人为了纪念黎曼的卓越贡献，就用他的名字命名了这一函数。

远在黎曼之前，黎曼 ζ 函数（当然那时还不叫这个名字）的级数表达式就已经出现在了数学文献中，但是那些表达式中函数的定义域较小。黎曼把黎曼 ζ 函数的定义域大大地延拓了，这一点对于黎曼猜想的表述及研究具有重要的意义。仅凭这一点，即便把黎曼称为黎曼 ζ 函数的提出者之一，也并不过份。

那么究竟什么是黎曼 ζ 函数呢？黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 是级数表达式 (n 为正整数）

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s} \qquad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

在复平面上的解析延拓。之所以要对这一表达式进行解析延拓，是因为——如我们已经注明的——这一表达式只适用于复平面上 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域（否则级数不收敛）。黎曼找到了这一表达式的解析延拓（当然黎曼没有使用“解析延拓”这样的现代复变函数论术语）。运用路径积分，解析延拓后的黎曼 ζ 函数可以表示为：

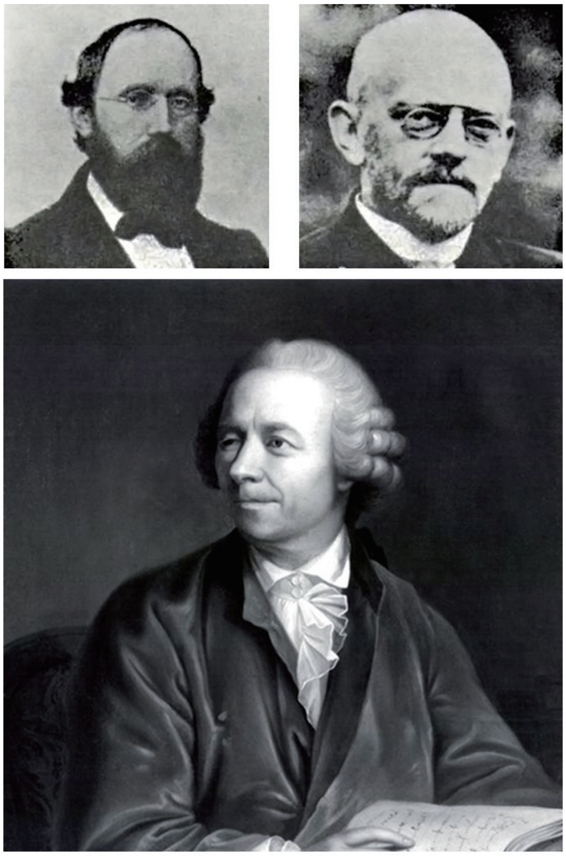
$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}。$$

这里我们采用的是历史文献中的记号，式中的积分实际是一个环绕正实轴（即从 $+\infty$ 出发，沿实轴上方积分至原点附近，环绕原点积分至实轴下方，再沿实轴下方积分至 $+\infty$——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于 0）进行的围道积分；式中的 Γ 函数 Γ(s) 是阶乘函数在复平面上的推广，对于正整数 $s>1$：$\Gamma(s)=(s-1)!$。可以证明，这一积分表达式除了在 $s=1$ 处有一个简单极点外在整个复平面上解析。这就是黎曼 ζ 函数的完整定义。

运用上面的积分表达式可以证明，黎曼 ζ 函数满足以下代数关系式：

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)。$$

从这个关系式中不难发现，黎曼 ζ 函数在 $s=-2n$（n 为正整数）取值为零——因为 $\sin(\pi s/2)$ 为零。复平面上的这种使黎曼 ζ 函数取值为零的点被称为黎曼 ζ 函数的零点。因此 $s=-2n$（n 为正整数）是黎曼



欧拉（下图）的乘积公式为黎曼（上左）的研究奠定了基础。希尔伯特（上右）被问到 500 年后如重返人间最想知道的是什么？他回答说是黎曼的问题解决了没有。

ζ 函数的零点。这些零点分布有序、性质简单，被称为黎曼 ζ 函数的平凡零点（trivial zeros）。除了这些平凡零点外，黎曼 ζ 函数还有许多其它零点，它们的性质远比那些平凡零点来得复杂，被称为非平凡零点（non-trivial zeros）。对黎曼 ζ 函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一。我们所要讨论的黎曼猜想就是一个关于这些非平凡零点的猜想，在这里我们先把它的内容表述一下，然后再叙述它的来龙去脉：

> 黎曼猜想：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 Re(s)=1/2 的直线上。

在黎曼猜想的研究中，数学家们把复平面上 Re(s)=1/2 的直线称为临界直线（critical line）。运用这一术语，黎曼猜想也可以表述为：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于临界直线上。

这就是黎曼猜想的内容，它是黎曼在 1859 年提出的。从其表述上看，黎曼猜想似乎是一个纯粹的复变函数命题，但我们很快将会看到，它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章。

3 素数的分布

一个复数域上的函数——黎曼 ζ 函数——的非平凡零点（在无歧义的情况下我们有时将简称其为零点）的分布怎么会与风马牛不相及的自然数集中的素数分布产生关联呢？这还得从欧拉乘积公式谈起。

我们知道，早在古希腊时期，欧几里得就用精彩的反证法证明了素数有无穷多个。随着数论研究的深入，人们很自然地对这些素数在自然数集上的分布产生了越来越浓厚的兴趣。1737 年，著名数学家欧拉（Leonhard Euler，1707-1783）在圣彼得堡科学院发表了一个极为重要的公式，为数学家们研究素数分布的规律奠定了基础。这个公式就是欧拉乘积公式：

$$\sum_n n^{-s} = \prod_p \left(1-p^{-s}\right)^{-1}。$$

公式中左边的求和对所有的自然数进行，右边的连乘积则对所有的素数进行。可以证明，这个公式对所有 Re(s)>1 的复数 s 都成立。这个公式的左边正是我们在上文中介绍过的黎曼 ζ 函数，而右边则是一个纯粹有关素数（且包含所有素数）的表达式，这样的形式正是黎曼 ζ 函数与素数分布之间存在关联的征兆。那么这个公式究竟蕴涵着有关素数分布的什么样的信息呢？黎曼 ζ 函数的零点又是如何出现在这种关联之中的呢？这就是本节及未来几节所要介绍的内容。

欧拉本人率先对这个公式所蕴涵的信息进行了研究。他注意到在 s=1 的时候，公式的左边 $\Sigma_n n^{-1}$ 是一个发散级数（这是一个著名的发散级数，称为调和级数），这个级数以对数方式发散。这些对于欧拉来说都是不陌生的。为了处理公式右边的连乘积，他对公式两边同时取了对数，于是连乘积就变成了求和，由此他得到：

Riemann

$$\ln\left(\sum_n n^{-1}\right) = -\sum_p \ln\left(1-p^{-1}\right)$$
$$= \sum_p \left(p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2} + \frac{1}{3}p^{-3} + \cdots\right)$$

由于上式右端括号中除第一项外所有其它各项的求和都收敛，而且这些求和的结果累加在一起仍然收敛（有兴趣的读者不妨自己证明一下）。因此右边只有第一项的求和是发散的。由此 Euler 得到了这样一个有趣的渐近表达式：

$$\sum_p p^{-1} \sim \ln\ln(\infty),$$

或者，更确切地说：

$$\sum_{p<N} p^{-1} \sim \ln\ln(N)。$$

这个结果，即 $\Sigma_p p^{-1}$ 以 $\ln\ln(N)$ 的方式发散，是继欧几里得证明素数有无穷多个以来有关素数的又一个重要的研究结果。它同时也是对素数有无穷多个这一命题的一种崭新的证明（因为假如素数只有有限多个，则求和就只有有限多项，不可能发散）。但欧拉的这一新证明所包含的内容要远远多于欧几里得的证明，因为它表明素数不仅有无穷多个，而且其分布要比许多同样也包含无穷多个元素的序列——比如 n^2 序列——密集得多（因为后者的倒数之和收敛）。不仅如此，如果我们进一步注意到上式的右端可以改写为一个积分表达式：

$$\ln\ln(N) \sim \int x^{-1}\ln^{-1}(x)\,dx。$$

而左端通过引进一个素数分布的密度函数 $\rho(x)$——

大数学家高斯 (1777-1855) 是最早研究素数分布的数学家之一

它给出在 x 附近单位区间内发现素数的概率——也可以改写为一个积分表达式：

$$\sum_{p<N} p^{-1} \sim \int x^{-1}\rho(x)\,dx。$$

将这两个积分表达式进行比较，不难猜测到素数的分布密度为 $\rho(x)\sim 1/\ln(x)$，从而在 x 以内的素数个数——通常用 $\pi(x)$ 表示——为：

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)。$$

其中 $\mathrm{Li}(x) \equiv \int \ln^{-1}(x)\,dx$ 是对数积分函数[注 3.1]。这正是著名的素数定理（当然这种粗略的推理并不构成对素数定理的证明）。因此欧拉发现的这个结果可以说是一扇通向素数定理的暗门。可惜欧拉本人并没有沿着这样的思路走，从而错过了这扇暗门，数学家们提出素数定理的时间也因此而延后了几十年。

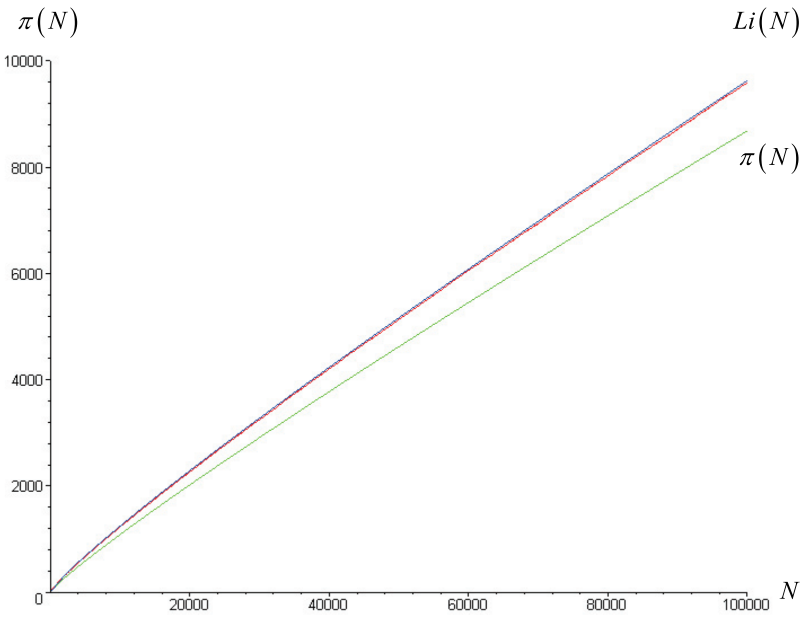
提出素数定理的荣誉最终落到了另外两位数学家的肩上：他们是德国数学家高斯（Friedrich Gauss，1777-1855）和法国数学家勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752-1833）。

高斯对素数分布的研究始于 1792 到 1793 年间，那时他才 15 岁。在那期间，每当“无所事事”的时候高斯就会挑上几个长度为一千的自然数区间，计算这些区间中的素数个数，并进行比较。在做过了大量的计算和比较后，高斯发现素数分布的密度可以近似地用对数函数的倒数来描述，即 $\rho(x)\sim 1/\ln(x)$，这正是上面提到的素数定理的主要内容。 但是高斯并没有发表这一结果。高斯是一位追求完美的数学家，他很少发表自己认为还不够完美的结果，而他的数学思想与灵感犹如浩瀚奔腾的江水，汹涌激荡，常常让他还没来得及将一个研究结果完美化就又展开了新课题的研究。因此高斯一生所做的数学研究远远多过他正式发表的。但另一

注 3.1

对数积分函数 $\mathrm{Li}(x)$ 的确切定义是 $1/\ln(x)$ 在 0 到 x 之间定积分的柯西主值。对于素数定理来说，人们关心的是 $\mathrm{Li}(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近行为，这时候积分的下限并不重要，因此人们在素数定理的研究中有时把 $\mathrm{Li}(x)$ 的积分下限取为 2 而不是 0，这样可以使被积函数在积分区间内没有奇点。

方面，高斯常常会通过其它的方式——比如书信——透露自己的某些未发表的研究成果，他的这一做法给一些与他同时代的数学家带来了不小的尴尬。其中“受灾”较重的一位便是勒让德。这位法国数学家在 1806 年率先发表了线性拟合中的最小平方法（即最小二乘法），不料高斯在 1809 出版的一部著作中提到自己曾在 1794 年（即比勒让德早了 12 年）就发现了同样的方法，使勒让德极为不快。



素数分布与素数定理

有道是：不是冤家不聚首。在素数定理的提出上，可怜的勒让德又一次不幸地与数学巨匠高斯撞到了一起。勒让德在 1798 年发表了自己关于素数分布的研究，这是数学史上有关素数定理最早的文献 [注 3.2]。由于高斯没有发表自己的研究结果，勒让德便理所当然地成为了素数定理的提出者。勒让德的这个优先权一共维持了 51 年。但是到了 1849 年，高斯在给德国天文学家恩克（Johann Encke，1791-1865）的一封信中提到了自己在 1792 至 1793 年间对素数分布的研究，从而把尘封了半个世纪的优先权从勒让德的口袋中勾了出来，挂到了自己已经鼓鼓囊囊的腰包上。

幸运的是，高斯给恩克写信的时候勒让德已经去世十六年了，他用最无奈的方式避免了再次遭受残酷打击。

无论高斯还是勒让德，他们对于素数分布规律的研究都是以猜测的形式提出的（勒让德的研究带有一定的推理成份，但离证明仍然相距甚远）。因此确切地说，素数定理在那时只是一个猜想——素数猜想，我们所说的提出素数定理指的也只是提出素数猜想。素数定理的数学证明直到一个世纪之后的 1896 年，才由法国数学家雅克 • 阿达马（Jacques Hadamard，1865-1963）与比利时数学家普 森（Charles de la Vallée-Poussin，1866-1962）彼此独立地给出。他们的证明与黎曼猜想有着很深的渊源，其中阿达马的证明出现的时机和场合还有着很大的戏剧性，这些我们将在后文中加以叙述。

素数定理是简洁而优美的，但它对于素数分布的描述仍然是比较粗略的，它给出的只是素数分布的一个渐近形式——也就是当 N 趋于无穷时的分布形式。从前面有关素数分布与素数定理的图示中我们也可以看到，$\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 之间是有偏差的，而且这种偏差的绝对值随着 x 的增加似有持续增加的趋势（所幸的是，这种偏差的增加与 $\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 本身的增加相比仍是微不足道的——否则素数定理也就不成立了）。从图上以及从更大范围的计算中人们发现 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 总是大于零，这使得有人猜测 $\mathrm{Li}(x)$ 不仅是素数分布的渐近形式，而且还是其严格上界。这种猜测在 1904 年被英国数学家李特尔伍德（John Littlewood，1885-1977）所推翻。李特尔伍德证明了 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 是一个在正与负之间震荡

注 3.2

勒让德提出的素数定理采用的是代数表达式：$\pi(x)\sim x/[\ln(x)-1.08366]$，它与积分形式的素数定理在渐近意义上是等价的。